Aplicații ale formulei Taylor

1) În cazul (i) din teorema IV.28, polinoamele $\boldsymbol{T_n(n)}$ **aproximează punctual funcția** $\boldsymbol{f(x)}$, în sensul că: pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, putem în general să determinăm un polinom $T_n(x)$ a.î. $E_n(x) < \varepsilon$ pentru toți x din I. În acest caz eroarea E_n este practic mai puțin utilă deoarece despre $E_n(x)$ nu avem mai multe informații decât despre $R_n(x)$.
2) În cazurile (ii) şi (iii) din teorema IV.28 polinoamele $T_n(x)$ dau pe intervalul I **o aproximare globală a funcției** $\boldsymbol{f(x)}$ în sensul că: pentru fiecare număr $\varepsilon > 0$ dat, se poate determina un polinom $T_n(x)$ a.î. $E_n(x) < \varepsilon, \forall x \in I$.
3) Tipurile de aproximări ale lui f în condițiile teoremei IV.28 vor fi mai exact precizate în capitolul **"Şiruri şi Serii de funcții reale".**
4) Teorema IV.28 se foloseşte pentru **aproximarea funcțiilor indefinit derivabile pe un interval** $\boldsymbol{I \subseteq R}$ **prin şirul corespunzător de polinoame Taylor**.

Exemple:

1°. $f(x) = e^x, x \in R$; $f \in C^\infty(R)$; $f_{(x)}^{(n)} = e^x, \forall x \in R$ şi $\forall x \in N$;

$f_{(0)}^{(n)} = 1, \forall n \in N$. Avem: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi, \forall x \in R$

şi $\forall x \in R$ fixat $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi = 0 \Rightarrow$ fiecare $x \in R$ fixat;

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right), \forall x \in R \Rightarrow e^x \cong 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

- În particular, pentru $x = 1$: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$.

- Pentru $x \in [0,1]$, să determinăm $n \in \mathbf{N}$ a.î. prin aproximare

$$e^x \cong 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = T_n(x) \text{ eroarea } E_n(x) < 0{,}125 \Rightarrow$$

$$E_n(x) = \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| < \frac{1}{(n+1)!} e < 0{,}125 = \frac{1}{8} \Rightarrow (n+1)! < 8e$$

pentru $n = 3 \Rightarrow e^x \cong 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \forall x \in [0,1]$.

2°. $f(x) = \sin x, x \in R$; $f \in C^\infty(R)$;

$$f_{(x)}^{(n)} = \sin\left(x + \frac{x\pi}{2}\right), \forall x \in R, \forall x \in N;$$

$$f_{(0)}^{(n)} = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & ; n = 2k \\ (-1)^k & ; n = 2k+1 \end{cases} \quad \text{Avem:}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi \Rightarrow$$

Pentru fiecare $x \in R$ fixat: $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + .. + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)$, în fiecare $x \in R$ fixat

$$\Rightarrow \sin x \cong \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + .. + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right).$$

- În particular: $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ cu $E_n(x) = \left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| < \frac{x^5}{5}\cdot l$ şi

$x \in [0,1]$ cu $l = 1 \Rightarrow E_n(x) < \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$.

- Pentru $x=\frac{\pi}{18}$ radiani, obținem: $\sin\frac{\pi}{18}\cong\frac{\pi}{18}-\frac{\pi^3}{6\cdot 18^3}$ cu eroarea

$$E_n(x)<\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5<\frac{1}{5}(0,2)^5<\frac{1}{3\cdot 10^5}.$$

3°. $f(x)=\ln(1+x), x\in I=(-1,\infty)$; $f\in C^\infty(I)$;

$f_{(x)}^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \forall x\in I,\ \forall x\in N$ şi $f_{(0)}^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$ Avem:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}};$$

Pentru $x\in[0,1]$, găsim : $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}\right|=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\ln(1+x)=\lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)$ şi atunci

$\ln(1+x)\cong\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right), \forall x\in[0,1]$ cu

$$E_n(x)=|f(x)-T_n(x)|=|R_n(x)|<\frac{1}{n+1}.$$

- În particular pentru n = 9, obținem:

$$\left|\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^9}{9}\right|<\frac{1}{10}, \forall x\in[0,1]$$

- Pentru x = 1

$$\left|\ln 2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-...-\frac{1}{n}\right|<\frac{1}{10}\ \}\Rightarrow\ln 2\cong\frac{1879}{2520}\cong 0,74$$

5) Formula lui Taylor se foloseşte în **calcularea unor limite**, care conduc la forme nedeterminate $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Exemple:

$$1°.\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{3!}\alpha(x)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1^3}{6}+\frac{1^3}{3!}\alpha(x)\right)=\frac{1}{6}$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0=\alpha(0)\right)$$

$$2°.\ \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\ln\frac{2+x}{2-x}\right]=l$$

$$\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=$$

$$\left[\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^5}{5}\alpha_1(x)\right]-\left[-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{24}+\frac{x^5}{5}\alpha_2(x)\right]=x+\frac{x^3}{12}+x^3\beta(x)$$

cu $\lim_{x\to 0}\beta(x)=0$

$$l=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\left(x+\frac{x^3}{12}+x^3\beta(x)\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{1}{12}-x^2\beta(x)\right]=\frac{11}{12}$$

6) **Teorema IV.29. (Determinarea punctelor de extrem local)**

Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ interval, $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă de n ($n \geq 2$) ori în $x_0 \in I$ cu $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$ şi $f^{(n)}_{(x_0)}\neq 0$, atunci au loc situațiile:

(i) Dacă n este par, atunci $x_0 \in I$ este punct de extrem local pentru f şi anume:

1) punct de minim local când $f^{(n)}_{(x_0)}>0$

2) punct de maxim local când $f^{(n)}_{(x_0)}<0$

(ii) Dacă n este impar $x_0 \in I$ nu este punct de extrem local pentru f.

Demonstrație:

În ipotezele teoremei are loc formula lui Taylor cu rest Peano:

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}_{(x_0)} + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}_{(x_0)} + \\ + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\alpha(x); \quad \lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0 = \alpha(x_0); \forall x \in I \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{(x-x_0)^n}{n!}\left[f^{(n)}_{(x_0)} + \alpha(x) \right] \text{ cu}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f^{(n)}_{(x_0)} + \alpha(x) \right] = f^{(n)}_{(x_0)} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \text{ a.î. } \operatorname{sign}\left[f^{(n)}_{(x_0)} - \alpha(x) \right] = \operatorname{sign} f^{(n)}_{(x_0)}, \forall x \in V \cap I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sign}\left[f(x) - f(x_0) \right] = \operatorname{sign}\left[f^{(n)}_{(x_0)} \right] \cdot \left[\frac{(x-x_0)^n}{n!} \right]; \forall x \in V \cap I .$$

(i) Dacă n este par $\Rightarrow (x-x_0)^n > 0,\ \forall x \in V \cap I$ şi avem $\operatorname{sign}\left[f(x) - f(x_0) \right] = \operatorname{sign} f^{(n)}_{(x_0)}$ şi rezultă cazurile 1) şi 2) conform definiției punctelor de extrem local (definiția III.9).

(ii) Dacă n este impar, $(x-x_0)^n$ are semn variabil pe $V \cap I$ şi la fel $\left[f(x) - f(x_0) \right]$ are semn variabil pe $V \cap I$, deci $x_0 \in I$ nu este punct de extrem local (definiția III.9).

Consecința IV.14.

Fie $I \subseteq R$ interval $x_0 \in I$ punct interior şi $f : I \to R$ o funcție derivabilă de două ori pe I cu f” continuă în $x_0 \in I$. Dacă $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) > 0$

(respectiv $f''(x_0)<0$), atunci x_0 este punct de minim local strict pentru *f* (respectiv punct de maxim local strict pentru *f*).

Demonstrația. Rezultă din teorema IV.29 pentru $n = 2$.

Observație. Condiția $f_{(x_0)}^{(n)} \neq 0$ este esențială în teorema IV.29.

7) **Formula lui Taylor** permite unele precizări în studiul **variației unei funcții reale de o variabilă reală**.

Dacă $f:[a,b]\to R$ este funcție de clasă $C^2\left(f\in C^2([a,b])\right)$ atunci *f* este **convexă pe [a,b]** (***f*** **este concavă pe [a,b]** sau *f* **"nu ține apa"**) sau **"*f* ține apa",** adică: $\forall x,x_0\in[a,b]$ avem:

$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (respectiv:

$f(x)\leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$), şi graficul lui *f* este situat deasupra tangentei (respectiv sub tangentă) în orice punct $(x_0,f(x_0))\in G_f$. După formula Taylor cu rest Lagrange de ordin 1 (*n*=1), avem: $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$ cu ξ situat între x şi x_0 de unde rezultă că:

I dacă $f''\geq 0$ pe $[a,b]$ atunci *f* este convexă şi reciproc.

II dacă $f''\leq 0$ pe $[a,b]$ atunci *f* este concavă şi reciproc sau *f* concavă pe $[a,b]$ $\Leftrightarrow(-f)$ este convexă pe $[a,b]$.

8) **Consecința IV.15**

Un număr real x_0 este o rădăcină multiplă de ordinul *k* al unui polinom $P_n(X)$ de grad $n\geq k$, dacă şi numai dacă,

$P_n(x_0)=P'_n(x_0)=...=P_n^{(k-1)}(x_0)=0$ şi $P_n^{(k)}(x_0)\neq 0$.

Demonstrație: Dacă $x_0 \in R$ este rădăcină multiplă de ordinul *k* al polinomului $P_n(X)$, avem:

$P_n(x) = (x - x_0)^k Q_1(x)$ cu $Q_1(x_0) \neq 0, x \in R$ şi prin derivare se obțin condițiile din enunț.

Dacă au loc condițiile din enunț, după formula lui Taylor, avem:

$$P_n(x) = \frac{(x - x_0)^k}{k!} P_n^{(k)}(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^m}{m!} P_n^{(m)}(x_0) = (x - x_0)^k Q_1(x)$$ cu

$Q_1(x_0) \neq 0$ şi rezultă că x_0 este rădăcină multiplă de ordin *k*.

Exemple:

1°. Pentru determinarea punctelor de extrem local ale funcției $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x, x \in R$ este suficient să le determinăm pe cele din $I = [0, 2\pi] \subset R$, restul se obțin adaugând perioada 2π.

$f'(x) = \cos x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x + 1 - 2\cos^2 x = 0$ şi

$\cos x = y \in [-1,1] \Leftrightarrow -2y^2 + y + 1 = 0$ cu $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ punctele critice sunt: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \frac{4\pi}{3}$, $x_4 = 2\pi$. Avem:

$$\begin{cases} f''(x) = -\sin x + 2\sin 2x \quad f^{(4)}(x) = \sin x - 8\sin 2x \\ f'''(x) = -\cos x + 4\cos 2x \end{cases}$$

I $x_1 = 0$: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 3 \neq 0$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$ nu este punct de extrem local.

II $x_4 = 2\pi$: $f'(2\pi) = 0$, $f''(2\pi) = 0$, $f'''(2\pi) = 3 \neq 0$ $\Rightarrow$ $x_4 = 2\pi$ nu este punct de extrem local.

III $x_2 = \frac{2\pi}{3}$: $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$, $f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2\pi}{3}$ este punct de maxim local şi $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$ este valoarea maximă a lui *f*.

IV $x_3 = \frac{4\pi}{3}$: $f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0$, $f''\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow x_3 = \frac{4\pi}{3}$ este punct de minim local şi $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3}{4}$ este valoarea minimă a lui *f*.

Cum avem $f(0) = f(2\pi) = 0$ obținem: $-\frac{3}{4} \le f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{3}{4}$, $\forall x \in R$, adică $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ este punct de maxim absolut şi $x_3 = \frac{4\pi}{3}$ este punct de minim absolut pentru *f*.

2°. $f(x) = 2x^6 - x^3 + 3, x \in \mathbf{R}$ şi să se determine punctele de extrem local. Avem: $f'(x) = 12x^5 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 0$ cu $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$ puncte staționare (critice) ale lui *f*. $f''(x) = 60x^4 - 6x$, $f'''(x) = 240x^3 - 6$.

I $x_0 = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -6 \ne 0$ (*n* = 3 impar) $\Rightarrow$ $x_0 = 0$ nu este punct de extrem local.

II $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = 0$, $f''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{9}{\sqrt[3]{4}} > 0$ (*n* = 2 par) $\Rightarrow$ $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ este punct de minim local cu $f_{\min} = f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{23}{8}$.

3°. $f(x) = 2\cos x + x^2, x \in \mathbf{R}$ şi să se determine punctele de extrem local. Avem:

$f'(x) = -2\sin x + 2 \Leftrightarrow x = \sin x \Rightarrow x_0 = 0$ punct critic al *f*.

$f''(x) = -2\cos x + 2$; $f'''(x) = 2\sin x$; $f^{(4)}(x) = 2\cos x$. Avem: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 2 > 0$ (*n* = 4 par) $\Rightarrow$ $x_0 = 0$ este punct de minim local cu $f_{\min} = f(0) = 2$.

4°. $f(x) = x^n \cdot \sin x, x \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}$ şi să se determine punctele de extrem local. Avem:

$$f'(x) = nx^{n-1}\sin x + x^n \cos x = x^{n-1}(x\cos x + n\sin x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1}(x\cos x + n\sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^{n-1} = 0 (n \geq 2) \\ x\cos x + n\sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ tgx = -\dfrac{x}{n}(n \geq 1) \end{cases}$ şi prin metoda grafică $\begin{pmatrix} y_1 = tgx \\ y_2 = -\dfrac{x}{n} \end{pmatrix}$ se determină soluțiile $\begin{cases} x'_k = \alpha + k\pi \\ x''_k = -\alpha + k\pi \end{cases}$ cu $\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \\ k = 0,1,2,... \end{cases}$

Punctele critice (staționare) ale funcției *f* sunt: x_0, x_k', x_k''.

Avem:

$$f''(x) = (n-1)x^{n-2}(x\cos x + n\sin x) + x^{n-1}(\cos x - x\sin x + n\cos x) =$$

$= x^{n-2}\left[2nx\cos x + (n^2 - n - x^2)\sin x\right]$ şi se obține:

I $\quad f''(x'_k) = \dfrac{(x'_k)^{n-1}(n^2 + n + x^2)}{n}\cos x'_k < 0$ pentru că $\begin{cases} x'_k < 0 \\ \cos x'_k < 0 \end{cases}$ şi punctele critice $x'_k = \alpha + k\pi\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ sunt puncte de maxim local.

II $f''(x''_k) = \frac{(x''_k)^{n-1}(n^2+n+x^2)}{n}\cos x''_k$ unde $\begin{cases} x''_k < 0 \\ \cos x''_k < 0 \end{cases}$ şi

$f''(x''_k) > 0$ pentru n par cu x''_k puncte de minim local, iar $f''(x''_k) < 0$ pentru n impar cu x''_k puncte de maxim local.

III $x_0 = 0$ şi calculăm:

$$f_{(x)}^{(n)} = x^n \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + nC_n^1 x^{n-1} \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + ... + n!x\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + n!\sin x$$

de unde avem: $f_{(0)}^{(n)} = 0$, $f_{(0)}^{(n-1)} = 0$, ..., $f'(0) = 0$ şi $f_{(0)}^{(n+1)} = n! \Rightarrow x_0$ este punct de minim local pentru n impar.

4°. O noţiune importantă în "***Teoria informaţiei***" este cea de **cantitate de informaţie** notată prin *I*. Vom considera informaţia $I = I(p)$ unde p este **probabilitatea** de producere a unui eveniment din realitatea fizică cu $p \in (0,1]$ şi care satisface axiomele (proprietăţile de definiţie):

i_1) *I* este o funcţie monotom descrescătoare,

i_2) $I(1) = 0$ şi $\lim_{p\to 0} I(p) = \infty$,

i_3) $I(pq) = I(p) + I(q), \forall p, q \in (0,1]$.

Proprietăţile i_1), i_2) rezultă din faptul că informaţia *I(p)* este cu atât mai bogată, mai interesantă, cu cât probabilitatea *p* este mai mică, adică evenimentul care a generat acea informaţie este mai rar. Proprietatea i_3) exprimă faptul că dacă două evenimente cu probabilităţile *p* şi *q* sunt independente, atunci informaţia cuprinsă în producerea lor simultană (a cărei probabilitate este *pq*) este suma informaţiilor cuprinse în producerile separate ale acelor evenimente.

Dacă presupunem că funcția I se poate prelungi la o funcție derivabilă $I:(0,\infty)\to R$, astfel încât: (i4) $I\left(p^{\alpha}\right)=\alpha I(p), \forall p>0, \alpha\in R$, atunci în mod necesar, avem: $I(p)=k\ln p$ cu k o constantă reală, $\forall p>0$, de unde rezultă: $I'(p)=\frac{1}{p}I(e)$, deci $I(p)=I(e)\ln p$ și notăm $k=I(e)<0$.

Definiția naturală, dedusă din considerații intuitive, a fost dată de C. Shannon, pentru **cantitatea de informație**, prin: $I(p)=-\log_2 p$, luând prin convenție $k=-\frac{1}{\ln 2}$; unitatea de măsură este bitul (1 bit fiind prin definiție $I\left(\frac{1}{2}\right)$, adică cantitatea de informație dintr-un eveniment cu probabilitatea $\frac{1}{2}$).

Dacă se consideră o experiență în care pot apărea n evenimente cu probabilitățile $p_1,p_2,...,p_n\left(0<p_i\le 1, i=\overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n}p_i=1\right)$, după C. Shannon, **cantitatea de informație** sau **entropia** asociată este dată prin:

$$H(p_1,p_2,...,p_n)\overset{def}{=}p_1I(p_1)+...+p_nI(p_n)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i \text{ și evident}$$

$$H(p_1,...,p_n)\ge 0, \forall p_i\in(0,1] \text{ cu } i=1,2,...,n.$$

În cazul $n=2$, notând $p_1=p$, $p_2=1-p$ și entropia va fi dată prin

$$H(p)=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)=-\frac{1}{\ln 2}\left[p\ln p+(1-p)\ln(1-p)\right].$$

Avem: $H'(p) = -\frac{1}{\ln 2}\left[\ln p - \ln(1-p)\right]$ şi $H''(p) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) < 0$, deci valoarea maximă a lui $H(p)$ este atinsă pentru $p = \frac{1}{2}$, adică $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. Cantitatea medie de informaţie într-o experienţă cu două evenimente posibile este maximă atunci când evenimentele sunt egal probabile.

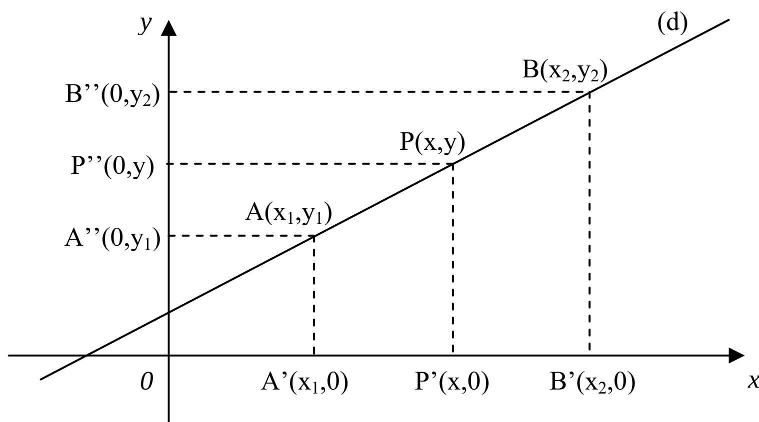
Această analiză se poate extinde la cazul experienţelor din realitatea fizică cu $n(n \geq 2)$ evenimente posibile ([42] pag. 130-131 şi pag 237-238; [9]; [19]).

5. Funcţii convexe. Aplicaţii

Studiul noţiunilor de **funcţie convexă** şi **funcţie concavă** impune introducerea conceptului de **mulţime convexă din plan**.

În plan considerăm un sistem ortogonal de coordonate carteziene xOy şi notăm $P(x, y)$ un punct curent.

Date $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, ele determină o dreaptă din plan (d) care conţine segmentul AB. Pentru $\forall P \in AB$, după teorema lui Thales avem: $\frac{AP}{BP} = t, \forall t \in [0,1]$ şi în plus:



$$(\text{IV}.18)\, t = \frac{AP}{BP} = \frac{A'P'}{B'P'} = \frac{A''P''}{B''P''} \Leftrightarrow t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{IV}.18) \begin{cases} x = (1-t)\,x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)\,y_1 + ty_2 \end{cases}, t \in [0,1] \Leftrightarrow$$

(IV.18') $(x, y) = (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2), \forall t \in [0,1]$ şi în concluzie: pentru $\forall A, B$ puncte din plan un punct $P \in AB$, dacă şi numai dacă, coordonatele sale (x, y) verifică relațiile (IV.18).

Definiția IV.7.

1) **Un segment din plan de capete** $A(x_1, y_1)$**,** $B(x_2, y_2)$, notat $AB = [(x_1, y_1);(x_2, y_2)]$ este format din mulțimea punctelor $P(x, y)$ care verifică relațiile (IV.18) sau (IV.18').

2) O mulțime nevidă *M* din plan $(M \subset R^2)$ se numeşte **mulțime convexă**, dacă $\forall A, B \in M$, segmentul *AB* este conținut în $M\,(AB \subset M)$.

Teorema IV.30 (teorema de caracterizare a mulțimilor convexe)

Fie $M \neq \varnothing$, $M \subset R^2$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) M mulțime convexă din plan

(ii) $\forall A, B \in M$ şi $\forall t \in [0,1]$, avem:

$$(1-t)A + tB \in M \left(\Leftrightarrow (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) \in M\right)$$

(iii) $\forall A, B \in M$ şi $\forall u, v \in R$ cu $u \geq 0, v \geq 0, u+v=1$, avem:

$$u(x_1, y_1) + v(x_2, y_2) \in M .$$

Demonstrația: este directă folosind definiția şi comentariile precedente. Fie $I \subseteq R$ un interval nedegenerat, care poate fi mărginit sau nemărginit, închis, deschis, sau nici închis şi nici deschis şi o funcție $f : I \to R$.

Definiția IV.8

1) Funcția f se numeşte **funcție convexă**, dacă $\forall a, b \in I$ şi $\forall t \in [0,1]$, avem:

(IV.19$_1$) $f\left[(1-t)a + tb\right] \leq (1-t) f(a) + tf(b)$.

2) Funcția f se numeşte **funcție concavă**, dacă $\forall a, b \in I$ şi $\forall t \in [0,1]$, avem:

(IV.19$_2$) $f\left[(1-t)a + tb\right] \geq (1-t) f(a) + tf(b)$

Teorema IV.31 (teorema de caracterizare pentru funcții convexe)

1) Funcția $f : I \to R$ este **funcție convexă**, dacă şi numai dacă $\forall a, b \in I$ şi $\forall u, v$ cu $u, v \in [0,1]$, $u + v = 1$, avem:

(IV.19'$_1$) $f(ua + vb) \leq uf(a) + vf(b)$

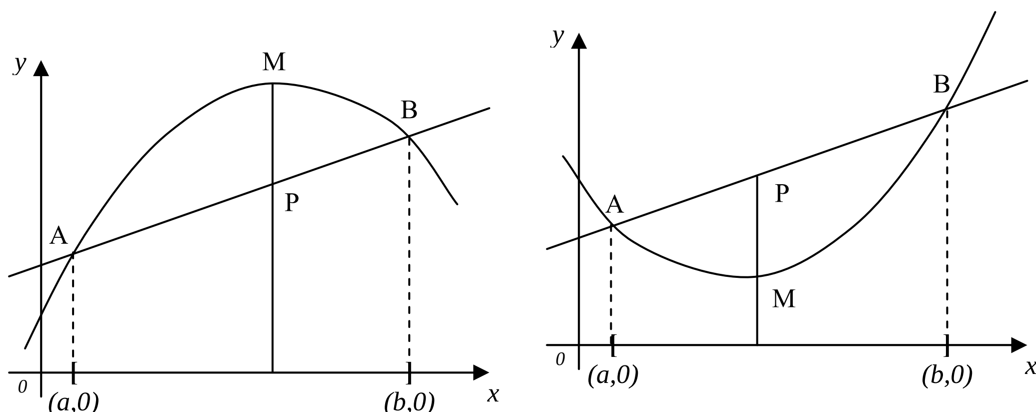
2) Funcția $f : I \to R$ este **funcție concavă**, dacă şi numai dacă $\forall a,b \in I$ şi $\forall u,v \in [0,1]$ cu $u+v=1$, avem:

(IV.19'$_2$) $f(ua+vb) \geq uf(a)+vf(b)$

Demonstrația este directă din (iii) – teoremă de caracterizare a mulțimilor convexe din plan (teorema VI.30).

Observații

1. Relațiile (IV.19$_2$) şi (IV.19'$_2$) se obțin din (IV.19$_1$) şi (IV.19'$_1$) prin înmulțirea cu (-1). Dacă *f* este funcție convexă, atunci (-*f*) este funcție concavă şi invers.
2. Toate proprietățile funcțiilor concave se obțin din proprietățile funcțiilor convexe înlocuind *f* cu (-*f*). Vom studia numai funcțiile convexe.
3. Relațiile (IV.19$_1$), (IV.19$_2$), (IV.19'$_1$), (IV.19'$_2$) au interpretări geometrice folosind graficul unei funcții reale şi caracterizarea punctelor unui segment din plan (IV.18).



Fie $G(f)=\{(x,y)\in R^2 \,|\, y=f(x), x\in I\}$ graficul funcției f şi $A,B,M\in G(f)$ cu $P\in AB$, date prin: $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$, $M(x,f(x))$ şi $P(x,y)$.

Din (IV.18) pentru $\forall t\in[0,1]\Rightarrow \begin{cases} x=(1-t)a+tb \\ y=(1-t)f(a)+tf(b) \end{cases}$ şi cum $P\in AB$, iar $M\in G(f)$ şi au abscisele egale cu *x*, cu ajutorul ordonatelor acestor puncte: *y* = *f(x)* vom caracteriza funcțiile convexe.

Teorema IV.32.

Funcția $f:I\to R$ cu graficul $G(f)$ este o funcție convexă, dacă şi numai dacă, $\forall A,B\in G(f)$ atunci restricția graficului lui *f* la $[a,b]\subset I$ se află sub segmentul $AB(\Leftrightarrow f(x)\le y, \forall x\in[a,b])$.

Demonstrația este evidentă prin figurarea în plan a mulțimilor AB şi $G(f)$.

Definiția IV.9.

1°. Funcția $f:I\to R$ este **strict convexă** dacă $\forall a,b\in I$ cu $a\ne b$ şi $\forall t\in[0,1]$, avem:

(IV.19$_1$”) $f[(1-t)a+tb]<(1-t)f(a)+tf(b)$

2°. Funcția $f:I\to R$ este **strict concavă** dacă $\forall a,b\in I$ cu $a\ne b$ şi $\forall t\in[0,1]$, avem:

(IV.19$_2$”) $f[(1-t)a+tb]>(1-t)f(a)+tf(b)$

Exemple:

1°. $f(x)=mx+n$ cu $m,n\in R$, $m\neq 0$ este în acelaşi timp convexă şi concavă:

$\forall a,b\in R$ şi $\forall t\in[0,1]$ $\Rightarrow$ $f[(1-t)a+tb]=m[(1-t)a+tb]+n=$

$=(1-t)(ma+n)+t(mb+n)=(1-t)f(a)+tf(b)$.

2°. $f(x)=x^2, x\in R$ şi $g(x)=-x^2=-f(x), x\in R$

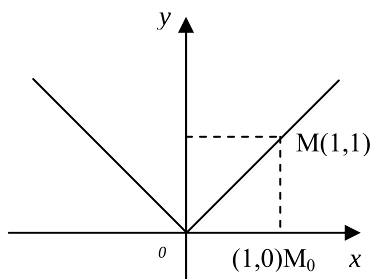
$\forall a,b\in R$ şi $\forall t\in[0,1]$, avem:

$$f[(1-t)a+tb]=[(1-t)a+tb]^2<(1-t)a^2+tb^2=(1-t)f(a)+tf(b)$$

deoarece

$[(1-t)a+tb]^2<(1-t)a^2+tb^2 \Leftrightarrow t(t-1)(a-b)^2<0$ $\Rightarrow$ f este strict convexă şi *g* este strict concavă.

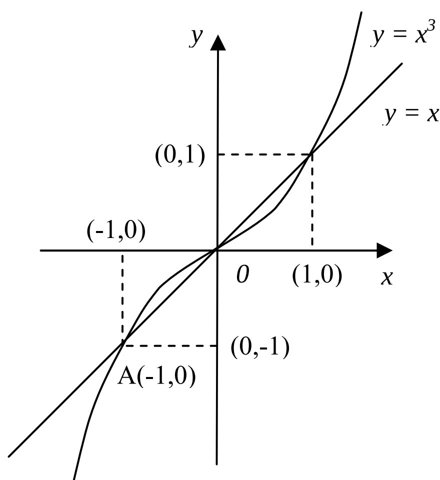
3°. $f(x)=|x|, x\in R$ este convexă, dar nu este strict convexă: $\forall a,b\in R$ şi



$\forall t\in[0,1]$, avem:

$$f[(1-t)a+tb]\leq(1-t)|a|+t|b|=(1-t)f(a)+tf(b)$$

$f=|x|$ nu este strict convexă deoarece OM este pe graficul lui *f*.

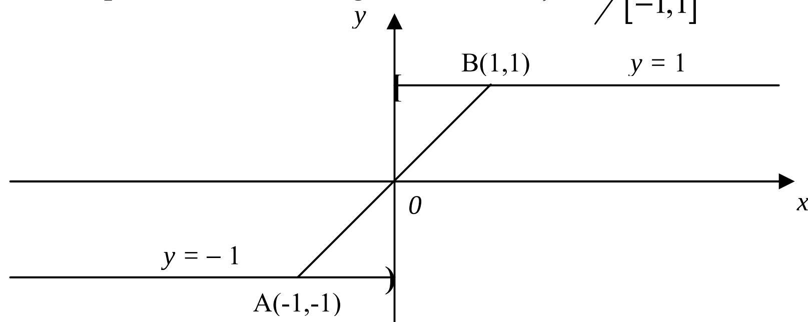


4°. $f(x)=x^3, x\in R$ nu este nici convexă şi nici concavă.

Segmentul AB cu $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ nu este în întregime situat deasupra sau dedesubtul graficului funcţiei $f/_{[-1,1]}$.

Funcţia *f* este strict convexă pe (0, + ∞) şi strict concavă pe (- ∞, 0).

5°. $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}1; x\geq 0\\ -1; x<0\end{cases}$ nu este nici convexă şi nici concavă, deoarece segmentul AB de capete $A(-1,1)$, $B(1,1)$ nu este în întregime situat deasupra sau dedesubtul graficului funcţiei $f/_{[-1,1]}$.



6°. Fie $A\subseteq R$ o submulţime proprie; funcţia caracteristică a lui $A:\varphi_A(x)=\begin{cases}1; x\in A\\ 0; x\in R\setminus A\end{cases}$ nu este nici convexă şi nici concavă.

Teorema IV.33 (Teoremă de caracterizare pentru funcții convexe)

Fie $f: I \to R$. Funcția f este convexă, dacă şi numai dacă, pentru orice $n \in N$ cu $n \geq 2$ şi $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in I$, $\forall t_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$ cu $t_1 + ... + t_n = 1$, avem:

(IV.20) $f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$

Demonstrație:

Presupunem f convexă pe I şi demonstrăm valabilitatea relației (IV.20) prin inducție după *n*. Pentru $n = 2$ relația (IV.20) este verificată după (IV.19'$_1$). Presupunem că (IV.20) este adevărată pentru $(k-1)$ puncte cu $k - 1 \geq 2$ şi demonstrăm că are loc pentru k puncte. Avem: $\sum_{i=1}^{k} t_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} t_i x_i + t_k x_k = t \cdot x + t_k x_k$ unde $t = \sum_{i=1}^{k-1} t_i$ şi $x = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{t_i}{t} x$. Cum f este convexă şi (IV.20) este valabilă pentru $(k-1)$ puncte, avem:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} t_i x_i\right) = f(tx + t_k x_k) \leq tf(x) + t_k f(x_k) \leq t\sum_{i=1}^{k-1} \frac{t_i}{t} f(x_i) + t_k f(x_k) = \sum_{i=1}^{k} t_i f(x_i)$$

$\Rightarrow$ proprietatea din (IV.20) are loc pentru $\forall n \in N$ cu $n \geq 2$.

Dacă pentru f este valabilă relația (IV.20), atunci f este o funcție convexă pe *I*. Pentru $n = 2$ din (IV.20) se obține relația (IV.19$_1$') deci f este funcție convexă pe *I*

Vom stabili o legătură între clasa funcțiilor reale convexe şi mulțimile convexe din plan.

Teorema IV.34.

1°. Funcția $f: I \to R$ este convexă, dacă şi numai dacă supragraficul său, adică mulțimea:

(IV.21$_1$) $G^{+}(f)=\{(x,y)\in R^2 \mid y\geq f(x); x\in I\}; G^{+}(f)\subset R^2$

este o mulțime convexă din plan.

2°. Funcția $f: I\to R$ este concavă, dacă şi numai dacă subgraficul său, adică mulțimea:

(IV.21$_2$) $G^{-}(f)=\{(x,y)\in R^2 \mid y\leq f(x); x\in I\}; G^{-}(f)\subset R^2$

este o mulțime convexă din plan.

Demonstrație:

Vom dovedi numai echivalența: *f* convexă pe *I* $\Leftrightarrow$ $G^{+}(f)$ convexă în plan, deoarece *f* convexă implică $(-f)$ concavă.

Fie *f* o funcție convexă pe *I* şi să arătăm că $G^{+}(f)$ este o mulțime convexă din plan. Pentru $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in G^{+}(f)$ şi $\forall t\in[0,1]$, notăm:

(*) $(x,y)=(1-t)(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)$ şi cum avem $y_1\geq f(x_1), y_2\geq f(x_2)$, iar $x=(1-t)x_1+tx_2, \forall x\in I$ $\Rightarrow$

$f(x)=f[(1-t)x_1+tx_2]\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\leq$

$\leq(1-t)y_1+ty_2=y\Rightarrow(x,y)\in G^{+}(f)$ care este o mulțime convexă din plan, conform teoremei de caracterizare a mulțimilor convexe (teorema IV.31).

Presupunem $G^{+}(f)$ mulțime convexă din plan şi să dovedim că *f* este convexă.

Fie $a,b\in I$ şi $\forall t\in[0,1]$, notăm $s=1-t$ şi avem: $(a,f(a))\in G^{+}(f)$, $(b,f(b))\in G^{+}(f)$ şi cum $G^{+}(f)$ este mulțimea convexă $\Rightarrow$

$s(a,f(a))+t(b,f(b))=(sa+tb; sf(a)+tf(b))\in G^{+}(f)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(sa+tb) \le sf(a)+tf(b)$ tocmai (IV.19_1') $\Rightarrow f$ este funcție convexă.

Observații:

1) Testarea directă a condițiilor de caracterizare a unei funcții convexe: (IV.19_1') (din definiție) sau (IV.19_1) (din teorema de caracterizare) este de multe ori greoaie.

2) Se vor prezenta condiții mai uşor de testat în practică, care folosesc proprietatea de derivabilitate a unei funcții.

3) Fie $a,b,c \in I$ puncte distincte două câte două şi considerăm funcția:

$$\text{(IV.22)}\quad r_a : I-\{a\} \to R, r_a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(a) \\ 1 & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x \end{vmatrix}} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

care este panta segmentului *AM* cu $A(a, f(a))$ şi $M(x, f(x))$.

4) Monotonia funcției *f* pe *I* poate fi exprimată prin condiția ca raportul $r_a(x) \ge 0$ sau $r_a(x) \le 0$, $\forall a,x \in I$ cu $x \ne a$.

5) Se va generaliza funcția raport $r_a(x)$ din (IV.22) considerând $a,b,c \in I$ cu $a \ne b$, $a \ne c$, $b \ne c$ cu care definim:

$$\text{(IV.23)}\quad R(a,b,c) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}}$$

care prin calculul determinanților de ordin 3:

$$R(a,b,c) = \frac{(a-b)\left[f(c)-f(b)\right]-(c-b)\left[f(a)-f(b)\right]}{(a-b)(c-b)(c-a)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (IV.23') $R(a,b,c)=\dfrac{r_b(c)-r_b(a)}{c-a}$

6) Vom caracteriza convexitatea funcțiilor reale prin raportul $R(a,b,c,)$ dat prin (IV.23'). Din definiția determinanților rezultă că raportul $R(a,b,c,)$ este simetric în raport cu variabilele *a, b, c*.

7) Avem situația: $a<b<c$, dacă și numai dacă, există $t\in(0,1)$ a.î. $b=(1-t)a+tc$ şi înlocuind în (IV.23') obținem:

$$R(a,b,c)=\frac{1}{c-a}\left[\frac{f(c)-f(b)}{(1-t)(c-a)}+\frac{f(a)-f(b)}{t(c-a)}\right]\Rightarrow$$

(IV.23") $R(a,b,c)=\dfrac{(1-t)f(a)+tf(c)-f\left[(1-t)a+tc\right]}{t(1-t)(c-a)^2}$

Teoremă IV.35 (Teoremă de caracterizare pentru funcții reale convexe)

Fie $f:I\rightarrow R, I\subset R$ interval nedegenerat. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) *f* este convexă (respectiv strict convexă)

(ii) $R(a,b,c)\geq 0, \forall a,b,c\in I$ puncte distincte (respectiv $R(a,b,c)>0$)

(iii) $r_b(a)\leq r_b(c), \forall a,b,c\in I$ cu $a<b<c$ (respectiv $r_b(a)<r_b(c)$)

(iv) r_b este monoton crescătoare $\forall b\in I$ (r_b este monoton strict crescătoare).

Demonstrație: ([41] pag. 227-229)

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) după simetria lui *R*, presupunând $a<b<c$ şi echivalența rezultă din (IV.23").

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) rezultă din egalitatea (IV.23')

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv) rezultă din (IV.23')

(iv) $\Leftrightarrow$ (iii) este evidentă (definiția funcției crescătoare)

Teorema IV.36 (Proprietăți ale funcțiilor convexe)

Fie $f: I \to R$ o funcție convexă, atunci au loc afirmațiile:

I) *f* este funcție derivabilă la stânga şi la dreapta în orice punct interior $b \in I$.

II) *f* este funcție continuă în orice punct interior $b \in I$.

Demonstrație:

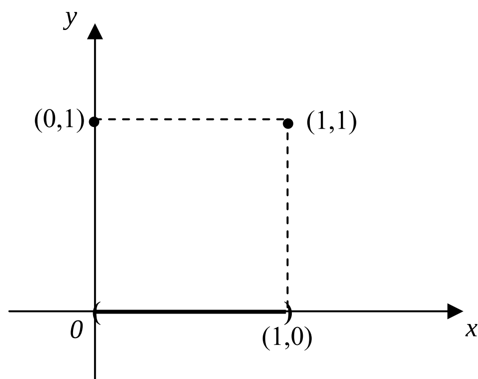
I) Fie $\forall b \in I$ punct interior, atunci există $a, c \in I$ astfel încât $a < b < c$, deci $[a, c] \subset I$. După teorema precedentă restricția funcției r_b la (a, c) este monoton crescătoare şi mărginită superior de $r_b(c)$; în aceste condiții raportul $r_b(x)$ pentru $\forall x \in [a, c]$ are limită la stânga în *b*, adică există:

$\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} r_b(x) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'_s(b) \in R$ şi f este derivabilă la stânga în punctul $b \in I$. La fel se arată că există $f'_d(b) \in R$ şi *f* este derivabilă la dreapta în punctul $b \in I$.

II) Din afirmația I), care asigură existența $f'_s(b)$, $f'_d(b)$, rezultă că *f* este continuă la stânga şi la dreapta în $b \in I$ punct interior, deci *f* este o funcție continuă în $b \in I$.

Observații:

1. O funcție $f: I \to R, I \subset R$ interval şi f convexă, funcția f nu este totdeauna continuă în extremitățile intervalului *I*.



2. **Exemplu** $f(x)=\begin{cases}1; x=0, x=1\\ 0; x\in(0,1)\end{cases}$

f este funcție convexă pe $[0,1]$ şi este discontinuă în punctele $x=0$ şi $x=1$.

Teorema IV.37 (Teorema de caracterizare a funcțiilor convexe cu derivata de ordin I)

Fie $f:I\to R$ o funcție derivabilă pe intervalul $I\subset R$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(1°). *f* convexă (respectiv strict convexă)

(2°). (IV.24) $f(a)+(x-a)f'(a)\leq f(x)$ $\forall a,x\in I$ cu $x\neq a$

(respectiv $f(a)+(x-a)f'(a)< f(x)$)

(3°). Derivata $f':I\to R$ este monon crescătoare (respectiv *f'* este monoton strict crescătoare).

Demonstrație:

(1°) ⇒ (2°) Presupunem *f* convexă şi fie $\forall a,x\in I$ cu $a\neq x$, de exemplu $a<x$. Considerăm $t,s\in I$ cu $a<t<s<x$ şi avem:

$$r_a(t)=\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\leq r_a(s)=\frac{f(s)-f(a)}{s-a}\leq r_a(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

de unde prin trecere la limită pentru $t\to a$, rezultă:

$$f'(a)\leq\frac{f(s)-f(a)}{s-a}\leq\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f'(a)\leq\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-a)f'(a)\leq f(x)-f(a)\Leftrightarrow f(a)+(x-a)f'(a)\leq f(x)$$

care coincide cu (IV.24) din (2°).

(2°) ⇒ (3°) Fie $a,x\in I$ cu $a<x$ şi după (2°) are loc relația

(IV.24') $f(x)+(a-x)f'(x)\le f(a)$ (în care $\begin{matrix} a\to x \\ x\to a \end{matrix}$)

şi scriind relaţia de forma (IV.24) $f(a)+(x-a)f'(a)\le f(x)$ prin adunarea lui (IV.24') cu (IV.24), avem:

$\begin{cases}(x-a)\left[f'(a)-f'(x)\right]\le 0 \\ x-a>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(a)\le f'(x) \\ a<x\end{cases} \Rightarrow$ *f'* este funcţie crescătoare pe $[a,x]$ şi cum $\forall a,x\in I$ $\Rightarrow$ *f'* crescătoare pe *I*.

(3°) ⇒ (1°) Presupunem că *f'* este monoton crescătoare pe *I* şi $\forall a,b,c\in I$ cu $a<b<c$ după teorema IV.35 cazul (iii), aplicând teorema lui Lagrange, există *t* cu $a<t<b$ şi există *s* cu $b<s<c$ astfel încât:

$r_b(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(t)\le f'(s)=\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}=r_b(c)$ şi deci:

$r_b(a)\le r_b(c)$ (iii) ⇔ (i) *f* este funcţie convexă pe *I*.

Teorema IV.38 (Teoremă de caracterizare a funcţiilor convexe cu derivata ordin II)

Fie $f:I\to R$ o funcţie derivabilă de două ori pe *I*, atunci au loc echivalenţele:

1. *f* este convexă pe I ⇔ $f''(x)\ge 0$, $\forall x\in$I.

2. *f* este strict convexă pe I ⇔ $f''(x)>0$, $\forall x\in$I şi f'' nu este identic nulă pe nici un subinterval nedegenerat J ⊂ I.

Demonstraţie: 1. Pentru *f* derivabilă de două ori pe I, avem $f''(x)\ge 0$, $\forall x\in$I ⇔ f' este monoton crescătoare pe I tocmai (3°) din teorema precedentă şi cum (3°)⇔ (1°) ⇒ *f* este funcţie convexă pe I.

2. Presupunem f strict convexă pe I şi dovedim că $f''(x)>0$, $\forall x\in$I şi f'' nu este identic nulă pe J $\subset$ I. Cum f strict convexă pe I $\Leftrightarrow$ f' strict crescătoare pe I $\Leftrightarrow$ $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in$I. Dacă avem $f''(t)\geq 0$, $\forall t\in$J cu J $\subset$ I nedegenerat, atunci $f(x)=ax+b, \forall x\in$ I şi nu este valabilă ipoteza f strict convexă pe I $\Rightarrow$ f'' nu este identic nulă pe I.

Presupunem $f''(x)>0$ pe I şi f'' nu este identic nulă pe nici un subinterval nedegenerat J $\subset$ I. Din $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in$I $\Rightarrow$ f este convexă pe I şi din teorema precedentă, avem f' monoton crescătoare pe I. Dacă f' nu ar fi strict crescătoare pe I, atunci ar exista a, $b \in$ I, $a < b$ şi $f'(a)=f'(b) \Rightarrow$ f' este funcție constantă pe $[a, b]$ $\Rightarrow$ $f'' \equiv 0$ pe $[a, b]$ ceea ce contrazice ipoteza asupra lui f''. Rezultă că f' este strict crescătoare pe I şi deci, după teorema precedentă f este strict convexă pe I.

Teorema IV.39. (Teorema de caracterizare geometrică a funcțiilor convexe).

Fie f : I $\rightarrow$ **R** o funcție derivabilă. Funcția f este convexă pe I, dacă şi numai dacă, tangenta dusă în orice punct al graficului lui f se află sub grafic (cu excepția punctului de tangentă).

Demonstrație: Ipoteza f derivabilă pe I $\Rightarrow$ graficul lui f are tangentă în orice punct din I. Fie $a\in$I, ecuația tangentei la graficul lui f în $x = a$ este: $y=f(a)+(x-a)f'(a)$ şi conform punctului (2°) din teorema de caracterizare a funcțiilor convexe cu derivată de ordin I, avem:

(IV.24.) $f(a)+(x-a)f'(a)\leq f(x), \forall a,x\in I$ cu $a\neq x \Rightarrow$

$y_{\tan g}\leq y_{\text{grafic}}=f(x)$ şi are loc afirmația din teoremă deoarece (2°)$\Leftrightarrow$(1°) f convexă pe I.

Exemple: 1. $f(x)=x^4, x\in\mathbf{R} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases}12x^2; x\in\mathbf{R}^*\\ 0; x=0\end{cases} \Rightarrow$

$f''(x)>0, \forall x\neq 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare.

2. Fie $t_1>0, t_2>0, \ldots, t_n>0$ cu $t_1+t_2+\ldots+t_n=1$ şi $n \geq 2$, $n\in\mathbf{N}$, iar $x_1>0, x_2>0, \ldots, x_n>0$. Să se demonstreze relația:

(IV.25) $t_1x_1+t_2x_2+\ldots+t_nx_n \geq (x_1)^{t_1}\cdot(x_2)^{t_2}\cdot\ldots\cdot(x_n)^{t_n}$.

Considerăm $f : (0, \infty)\to \mathbf{R}$ cu $f(x)=\ln x$ care este funcție concavă, deoarece $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0, \forall x>0$. Folosind relația (IV.20) din teorema IV.33 de caracterizare a funcțiilor convexe aplicată lui $f(x)=\ln x$ cu $x > 0$, avem: $\ln\left(\sum_{i=1}^{n} t_ix_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n} t_i\ln x_i=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{t_i}\right)$ şi prin aplicarea exponențialei $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_ix_i\geq\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{t_i}$. Dacă $t_1=t_2=\ldots=t_n=\frac{1}{n}$ din (IV.25), avem: $M_a=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1+x_2+\ldots+x_n}=M_g$.

3. Fie $f(x)=|x|-1, x\in\mathbf{R}$ şi să se arate că f este funcție convexă iar $f\circ f$ nu este funcție convexă. La fel şi $g(x)=1-\sin x, x\in[0,\pi]$ este funcție convexă iar $g\circ g$ nu este funcție convexă.

I. Pentru $\forall a, b\in\mathbf{R}$ şi $\forall t\in[0,1]$, avem:

$f\left[(1-t)a+tb\right]=\left|(1-t)a+tb\right|-1\leq(1-t)|a|+t|b|=(1-t)f(a)+tf(b)\Rightarrow$

$f(x)=|x|-1$ este funcție convexă pe $\mathbf{R}$.

$\left((1-t)f(a)+tf(b)=(1-t)(|a|-1)+t(|b|-1)=(1-t)|a|+t|b|-1\right)$

$$h(x)=(f\circ f)(x)=|f(x)|-1=||x|-1|-1=\begin{cases}x-2; x\geq 1\\ -|x|; x\in(-1,1)\\ -x-2; x\leq -1\end{cases}.$$

Funcția h este discontinuă în punctele x = -1 şi x =1 $\Rightarrow$ h este discontinuă pe **R** $\Rightarrow$ h nu este convexă după condiția II) din teorema care precizează proprietăți ale funcțiilor convexe.

Avem şi $h'(x)=\begin{cases}+1; x\in(-1,0)\cup(1,\infty)\\ -1; x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\\ \nexists; x=-1; x=0; x=1\end{cases}\Rightarrow h$ nu are derivate laterale în orice punct din **R**.

II. Pentru $g(x)=1-\sin x, x\in[0,\pi]$, avem:

$g'(x)=-\cos x, g''(x)=\sin x\geq 0, \forall x\in[0,\pi]\Rightarrow g$ este funcție convexă pe [0, π].

$$\varphi(x)=g\circ g(x)=1-\sin g(x)=1-\sin[1-\sin x]$$
$$\varphi'(x)=-\cos[1-\sin x](-\cos x)=\cos x\cdot\cos[1-\sin x]$$
$$\varphi''(x)=-\sin x\cdot\cos[1-\sin x]+\cos^2 x\cdot\sin[1-\sin x]$$

şi φ'' nu are semn constant pe [0, π]

$\left(\varphi''(0)=\sin 1>0; \varphi''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0; \varphi''(\pi)=\sin 1>0\right)\Rightarrow \varphi=g\circ g$ nu este funcție convexă pe [0, π].

4. Să se arate că: $\ln\frac{x+y}{2}\leq\frac{x}{x+y}\ln x+\frac{y}{x+y}\ln y$ pentru ∀x, y∈(0, ∞).

Fie $f(t)=t\ln t$ cu t >0 $\Rightarrow\begin{cases}f'(t)=\ln t+1\\ f''(t)=\frac{1}{t}>0, \forall t>0\end{cases}\Rightarrow f$ este funcție convexă şi după (IV.20), avem:

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}\le\frac{x}{2}\ln\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\ln\frac{y}{2}\Leftrightarrow\ln\frac{x+y}{2}\le\frac{x}{x+y}\ln x+\frac{y}{x+y}\ln y.$$

5. Fe $\forall x,\ y\in$ **R** şi $\forall n\in$**N***, să se arate că are loc inegalitatea: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\frac{x^n+y^n}{2}$.

Fie $f(t)=t^n$ cu $t\ \ge 0\ \Rightarrow\begin{cases}f'(t)=nt^{n-1}\\ f''(t)=\begin{cases}n(n-1)t^{n-2};n\ge 2\\ 0;n=1\end{cases}\end{cases}$

$\Rightarrow f''(x)\ge 0$ pentru $\forall t\in[0,\infty)\Rightarrow f$ este funcție convexă $\Rightarrow$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\frac{x^n+y^n}{2}.$$

6. Fie $a\ge 0,\ n\ge 1$ şi să se arate că are loc inegalitatea: $(n+1)a^{\frac{n}{2}}\le\sum_{k=0}^{n}a^k$.

Fie $f(x)=a^x$ cu $x\in$ **R** şi $a>0, a\ne 1\Rightarrow f'(x)=a^x\ln a$ şi

$f''(x)=a^x(\ln a)^2\ge 0,\forall x\in$ **R** $\Rightarrow f$ este funcție convexă pe **R**. după proprietatea (IV.20) avem:

$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k\right)\le\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f(k)$ cu $f(k)=a^k$ şi

$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k=\frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2}$ de unde rezultă: $a^{\frac{n}{2}}\le\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a^k\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(n+1)a^{\frac{n}{2}}\le\sum_{k=0}^{n}a^k$.

7. Fie $a_1,a_2,...,a_n\in(0,1)$ cu $a=a_1+...+a_n$ şi să se arate ca are loc inegalitatea: $\frac{a_1}{1-a_1}+\frac{a_2}{1-a_2}+...+\frac{a_n}{1-a_n}\ge\frac{na}{n-a}$.

Fie $f\left(x\right)=\dfrac{x}{1-x}$ cu $x \in [0,1) \Rightarrow \begin{cases} f'\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(1-x\right)^2} \\ f''\left(x\right)=\dfrac{2}{\left(1-x\right)^3} \geq 0 \text{ pe} \left[0,1\right) \end{cases} \Rightarrow f$ este funcție convexă.

$$f\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right) \leq \frac{f\left(a_1\right)+f\left(a_2\right)+...+f\left(a_n\right)}{n} \text{ după (IV.20)}$$

Avem $a=a_1+...+a_n$ şi $\dfrac{a}{n}:\left(1-\dfrac{a}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a_1}{1-a_1}+\dfrac{a_2}{1-a_2}+...+\dfrac{a_n}{1-a_n}\right) \Leftrightarrow$

$$\frac{a}{\cancel{n}} \cdot \frac{n}{n-a} \leq \frac{1}{\cancel{n}}\left(\frac{a_1}{1-a_1}+\frac{a_2}{1-a_2}+...+\frac{a_n}{1-a_n}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{na}{n-a} \leq \frac{a_1}{1-a_1}+\frac{a_2}{1-a_2}+...+\frac{a_n}{1-a_n}.$$

8. Fie $x_1>0, x_2>0, ..., x_n>0$ cu $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ atunci:

$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\dfrac{1}{x_i}\right)^p \geq \dfrac{\left(n^2+1\right)^p}{n^{p-1}}, \forall p \in \mathbf{N}$. Pentru $\forall p \in \mathbf{N}$ fixat considerăm funcția: $f\left(t\right)=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^p$ cu $t>0 \Rightarrow f'\left(t\right)=p\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^{p-1}\left(t-\dfrac{1}{t^2}\right)$ şi

$$f''\left(t\right)=p\left(p-1\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)^{p-2}+\frac{2p}{t^2}\left(t+\frac{1}{t}\right)^{p-1}, \forall t>0 \Rightarrow f''\left(t\right) \geq 0$$

pentru $\forall t>0 \Rightarrow f$ este funcție convexă şi după (IV.20), avem:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \Leftrightarrow \left(n+\frac{1}{n}\right)^p = f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)^p \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(n^2+1\right)^p}{n^{p-1}} \leq \sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)^p.$$

9. Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in (0,1)$ cu $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ să se arate că are loc inegalitatea:

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i} \geq \frac{n^2}{n-1}$.

Fie $f(t) = \frac{1}{1-t}$ cu $t \in (0,1) \Rightarrow$ şi $\begin{cases} f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \\ f''(t) = \frac{2}{(1-t)^3} \geq 0,\ t \in (0,1) \end{cases}$

$\Rightarrow f$ este funcţie convexă şi după (IV.20), avem:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i} \Leftrightarrow \frac{n^2}{n-1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i}.$$

5. Reprezentarea grafică a funcţiilor reale de o variabilă reală.

Fie A ⊆ **R** o mulţime care se reprezintă printr-o reuniune finită sau numărabilă de intervale nedegenerate şi disjuncte două câte două, numită **mulţime standard din R** şi f : A → **R**.

A reprezenta grafic funcţia *f* înseamnă a desena graficul lui f, adică a reprezenta mulţimea de puncte $G_f = \{(x, f(x)) | x \in A\}$ într-un sistem de axe ortogonale *xOy* în plan. În acest scop vom pune în evidenţă puncte, drepte şi alte elemente din plan intim legate de variaţia funcţiei f pe A. După teorema lui Fermat, dacă f este derivabilă pe A, printre soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0, x \in A$ se găsesc punctele de extrem local ale funcţiei f. Dacă $x_0 \in$ A este punct interior şi f derivabilă pe V = $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \in \mathcal{V}(x_0)$

cu $V \subseteq A$ şi $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, iar $f'(x_0) = 0$ şi $f' > 0$ (sau $f' < 0$) pe $(x_0 - \alpha, x_0)$, $f' < 0$ (sau $f' > 0$) pe $(x_0, x_0 + \alpha)$, atunci x_0 este punct de extrem local strict pentru *f* (Demonstrația este directă din definiția punctelor de extrem local şi consecința teoremei Lagrange care indică intervalele de monotonie pentru *f*). Pentru $x_0 \in A$, punct interior, cu proprietatea că *f* este strict concavă (sau convexă) pe $(x_0 - \alpha, x_0)$ şi *f* este strict convexă (sau concavă) pe $(x_0, x_0 + \alpha)$ se numeşte **punct de inflexiune pentru *f***. Într-o vecinătate $V \subseteq A$ suficient de mică a punctului de inflexiune $x_0 \in A$, tangenta la graficul lui *f* în $(x_0, f(x_0))$ traversează o singură dată graficul lui *f* .

Teorema IV.40.

1] Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ mulțime standard şi $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă de două ori. Un punct x_0 interior lui A este punct de inflexiune pentru *f* dacă există $\alpha > 0$ cu $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \subseteq A$ a. î. $f'' > 0$ pe $(x_0 - \alpha, x_0)$ şi $f'' < 0$ pe $(x_0, x_0 + \alpha)$ sau invers.

2] Dacă *f* este derivabilă de două ori pe A şi x_0 punct interior lui A este punct de inflexiune, atunci $f''(x_0) = 0$.

Demonstrația este directă folosind definițiile şi caracterizările pentru punctul de inflexiune şi convexitate, respectiv concavitate.

Din teoremă rezultă că punctele de inflexiune pentru *f* sunt printre soluțiile ecuației $f''(x) = 0$, $x \in A$ şi semnul lui f'' pe o vecinătate a unui asemenea punct precizează în ce situație ne aflăm.

O dreaptă (*d*) din plan de ecuație $y = mx + n$ este asimptotă la $(\pm\infty)$ la graficul lui *f* dacă $\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (mx + n) \right] = 0$. Asimptota este oblică dacă $m \neq 0$ şi asimptota este orizontală dacă $m = 0$.

Teorema IV.21.

Dreaptă (d) din plan de ecuație $y = mx + n$ este asimptotă la $(+\infty)$ la graficul funcției $f : (a, \infty) \to \mathbf{R}$, dacă şi numai dacă, $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ şi $n = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right]$ cu $m, n \in \mathbf{R}$.

Demonstrație: Din definiție avem:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]=0 \Leftrightarrow 0=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-mx-n}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-m \Rightarrow$$

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Avem $d(y_d, y_f) = (mx + n) - f(x)$ cu $\lim\limits_{x\to+\infty} d(y_d, y_f) = 0$

$\Rightarrow f(x) - mx = n - d(y_d, y_f) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} [n - d(y_d, y_f)] = n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right]$.

Fie $x_0 \in A$ şi $f : A - \{x_0\} \to \mathbf{R}$, eventual A interval; dreapta (d) de ecuație $x = x_0$ este **asimptotă verticală** la graficul lui f dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ (sau $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \pm\infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \pm\infty$).

Reprezentarea grafică a funcției $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime standard se realizează pe baza unui algoritm care cuprinde următoarele etape:

Etapa I. Domeniul (mulțimea) de definiție.

1. Se precizează dacă pe $A \subseteq \mathbf{R}$ f este funcție: pară, impară, periodică.
2. Se determină punctele în care graficul lui f intersectează axele de coordonate: $\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$ şi $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$.
3. Se precizează existența limitelor $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ şi avem:

α) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ s-ar putea să existe asimptote oblice sau orizontale,

după cum $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbf{R}$ sau $m = 0$ şi $n = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx \right] \in \mathbf{R}$.

β) Dacă $m \in \{-\infty, +\infty\}$ nu avem asimptote nici oblice şi nici orizontale la graficul lui *f*.

γ) Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $x_0 \in$ A, atunci dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală şi f : A – $\{ x_0 \} \to \mathbf{R}$.

Etapa a II-a. Intervale de monotonie şi puncte de extrem local.

1. Se calculează $f'(x), x \in A$ şi se rezolvă ecuația $f'(x) = 0, x \in A$.

2. Semnul lui f' pe intervalele din A ne dă monotonia lui *f* pe aceste intervale şi precizăm care din soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt puncte de extrem local (f' îşi schimbă semnul pe o vecinătate a unui asemenea punct).

Etapa a III-a. Intervale de convexitate şi concavitate.

Se calculează $f''(x), x \in A$.

1. Soluțiile ecuației $f''(x) = 0, x \in A$ sunt puncte de inflexiune dacă f'' îşi schimbă semnul pe o vecinătate a unui asemenea punct.

2. Intervalele pe care f'' are semnul constant sunt intervalele de convexitate pentru $f'' > 0$ şi intervalele de concavitate pentru $f'' < 0$.

Etapa a IV-a. Toate rezultatele din celelalte etape se trec în **tabelul de variație al funcției** ***f*** **∈ C^2(A):**

a) în prima rubrică orizontală se trec valorile remarcabile $x \in$ A.

b) în a doua rubrică orizontală se precizează semnul lui f' pe intervale şi $x \in$ A cu $f'(x) = 0$.

c) în a treia rubrică orizontală se trec valorile lui *f* în punctele remarcabile $x \in A$ şi săgeţile care indică *f* crescătoare, respectiv descrescătoare pe intervale.

d) în a patra rubrică orizontală se precizează semnul pentru f'' pe intervale, $x \in A$ cu $f''(x)=0$ şi semnul care indică convexitatea lui *f* respectiv concavitatea lui *f* pe intervale.

Etapa a V-a – se trasează graficul lui *f*, desenând asmptotele, punctele remarcabile $x \in A$ şi apoi graficul lui *f* ca o linie continuă dacă $f \in C^2(A)$.

Exemple:

1) $f(x)=x-2\operatorname{arctg} x, x \in \mathbf{R}$.

I.1. *f* este impară: $f(-x)=-f(x), x \in \mathbf{R}$ şi se poate trasa graficul numai pe $\mathbf{R}_+$.

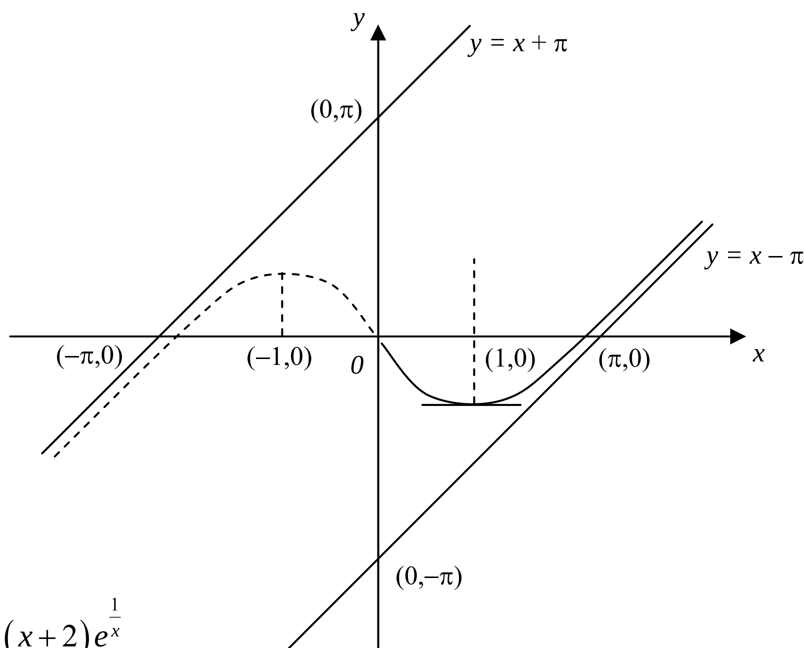
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, deci graficul lui *f* admite cel puţin o asimptotă: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]= -\pi \Rightarrow$ dreapta (*d*) $y = x - \pi$ asimptotă oblică la $+\infty$.

II. $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ cu $f'(x)=0$ în $x_1 = 1$ (şi $x_2= -1 \in \mathbf{R}_+$) şi $f'(x) < 0$, $\forall x \in [0, 1]$, iar $f'(x) > 0$, $\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ descrescătoare pe [0, 1] şi crescătoare pe $(1, +\infty)$.

III. $f''(x)=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$ cu $f''(x)=0$ în $x_0= 0$ şi $f''(x) < 0$ pentru $x< 0$ şi $f''(x) > 0$ pentru $x>0 \Rightarrow x_0= 0$ este punct de inflexiune şi *f* este concavă pe $(-\infty, 0)$ şi convexă pe $(0, +\infty)$.

IV.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	-	- -	0	+ + +	
$f(x)$	0	↘	$1-\frac{\pi}{2}$	↗	$+\infty$
$f''(x)$	(i) 0	+ ∪	(M) +	+	



2. $\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}} \\ x\in A=\mathbf{R}^* \end{cases}$.

I.1. A = $\mathbf{R}-\{0\}$; *f* nu este nici pară, nici impară.

2. Graficul nu taie O*y*; $\begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases}$ intersecția cu O*x*.

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty \Rightarrow m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1$.